

Алексеев В.В.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Задачи для самостоятельной подготовки

Учебно-методическое пособие

How many shortest-length paths are there to get from your house to the doughnut shop?

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

P	Q	R	P ∨ Q	P ∨ R	(P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F

$7, 11, 15, 19, \dots$

$a_1 - a_0 = 4$
 $a_2 - a_1 = 4$
 $a_3 - a_2 = 4$
 $\vdots$
 $a_n - a_{n-1} = 4$
 $a_n - a_0 = 4n$
 $a_n = 4n + a_0$
 $a_n = a_0$

$\binom{11}{7} = \binom{11}{4} = 330$ paths

B_6

B_9

One-to-One

Onto

Find $7 + 12 + 17 + 22 + \dots + 342$

$S_n = 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + 342$

$+ S_n = 342 + 337 + 332 + 327 + \dots + 7$

$2S_n = 349 + 349 + 349 + 349 + \dots + 349$

$2S_n = 349 \cdot 68$

$S_n = \frac{349 \cdot 68}{2}$

$S_n = 11866$

Original:
 $\exists x \forall y (x \geq 2y \rightarrow x > y)$

Converse:
 $\exists x \forall y (x > y + 1 \rightarrow x \geq y)$

Negation:
 $\neg [\exists x \forall y (\neg (x \geq 2y) \vee x > y)]$

Contrapositive:
 $\exists x \forall y (x \leq y + 1 \rightarrow x < y)$

$v - e + f = 2$

P.I.E. Example:

$6! - \left[\binom{6}{1}5! - \binom{6}{2}4! + \binom{6}{3}3! - \binom{6}{4}2! + \binom{6}{5}1! \right]$

There are six dogs to give 13 tacos.

stars and bars diagram to illustrate the first

xth dog get 3 tacos, the second dog gets none,

third dog gets 5 and the fourth dog gets one.

$\{2, 4, 11, 19\}$

$(A \cup B \cup C) \cup (A \cap B \cap C)$

СарФТИ НИЯУ МИФИ

**Саровский физико-технический институт-
филиал Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ»**

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ
Кафедра вычислительной и информационной техники

Алексеев В.В.
Дискретная математика
Задачи для самостоятельной подготовки
Учебно-методическое пособие

Саров
2026

УДК 621.
ББК 22.176
А47

Алексеев В.В. – Дискретная математика. Задачи для самостоятельной подготовки.

Учебно-методическое пособие. СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2026 г.

Данное пособие представляет собой самостоятельный модуль и предназначено для студентов, изучающих курс “Дискретная математика”.

Пособие составлено на основании лекций, читающихся студентам факультета информационных технологий и электроники в СарФТИ НИЯУ МИФИ.

Учебно-методическое пособие может быть полезно студентам и аспирантам других специальностей, использующих дискретную математику и современные методы дискретного анализа в направлении своей подготовки.

Задачи для самостоятельного решения по курсу Дискретная математика.

I. Тема. Элементы теории множеств.

1. Изобразите элементы множеств на числовой прямой

1.1. $A_1 = \{x | x \in N, x \leq 4\};$

1.2. $A_2 = \{x | x \in Z, -2 \leq x < 4\};$

1.3. $A_3 = \{x | x \in Z, x \leq 4\};$

1.4. $A_4 = \{x | x \in R, |x| \leq 2\};$

1.5. $A_5 = \{x | x \in R, x \geq -5\};$

1.6. $A_6 = \{x | x \in R, x \leq 4\};$

1.7. $A_7 = \{x | x \in N, -2 < x \leq 3\};$

1.8. A_8 -множество целых корней уравнения

$$(x^2 - 9) \cdot (x - 4) \cdot (3x + 8) = 0;$$

1.9. A_9 -множество действительных корней уравнения

$$(x_2 - 4) \cdot (x^3 + 27) \cdot (3x + 10) = 0;$$

1.10. A_{10} -множество действительных решений неравенства

$$(x - 4) \cdot (x + 2) \cdot (x + 6) < 0;$$

1.11. A_{11} -множество действительных решений неравенства

$$|x^2 + 4x + 1| > 4;$$

1.12. A_{12} -множество целых решений неравенства

$$|2x - 3| < 5.$$

2. Укажите характеристическое свойство множеств

2.1 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\};$

2.2 $B = \{a, п, р, е, л, ь\};$

2.3 $C = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\};$

2.4 $D = \{+, -, \times, :\}.$

3. Задайте множества перечислением элементов

a) $A_1 = \{x | x \in N, x < 8\};$

b) $A_2 = \{x | x \in Z, -3 < x \leq 5\};$

c) $A_3 = \{x | x \in Z, |x| < 4\};$

d) A_4 – множество нечетных однозначных натуральных чисел;

e) A_5 – множество однозначных целых чисел кратных 3;

f) A_6 – множество двузначных натуральных чисел кратных 12;

g) $A_7 = \{x | x \in N, 4 \leq x < 8\};$

h) $A_8 = \{x | x \in R, (x + 4) \cdot (x^2 - 3) = 0\};$

i) A_9 – множество нечетных натуральных чисел меньших 17;

- ж) A_{10} – множество отрицательных целых чисел больших -9;
- к) $A_{11} = \{x | x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x < -1\}$;
- л) $A_{12} = \{x | x \in \mathbb{R}, (x^3 + 1) \cdot (x^2 - 25) = 0\}$.

4. Задайте множества указанием характеристического свойства.

- а) $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- б) $M_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
- в) $M_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
- г) $M_4 = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$;
- д) $M_5 = \{-1, -3, -5, -7, -9\}$;
- е) $M_6 = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
- ж) $M_7 = \{10, 20, 30, 40, 50\}$;
- з) $M_8 = \{10, 20, 30, 40, 50\}$;
- и) $M_9 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;
- к) $M_{10} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
- л) $M_{11} = \{1, 5, 9, 13\}$;
- м) $M_{12} = \{1, 2, 27, 256, 3125\}$.

5. Среди указанных множеств выберите конечные и задайте их перечислением элементов.

- а) A – множество целых решений уравнения $2x+3=0$;
- б) B – множество целых чисел, меньших 5;
- в) C – множество натуральных чисел, меньших 4;
- г) D – множество квадратов, со стороной 5 см;
- д) E – множество действительных корней уравнения $x^2 = 5\sqrt{x^2 - 2} - 4$;

6. Найдите пересечение множеств $A \cap B$, если

- а) $A = (-3; 7)$, $B = (1; 8)$;
- б) $A = [0; 5]$, $B = [5; 8]$;
- в) $A = (-\infty; +\infty)$, $B = (-1; 9)$;
- г) A – множество простых чисел, B – множество положительных четных чисел;
- д) A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов;
- е) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 16\}$;
- ж) $A = \{x | n \in \mathbb{N}, x = n^2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 40\}$;

7. Выясните, в каких отношениях находятся множества A и B . Проиллюстрируйте эти отношения, используя диаграммы Эйлера-Венна.
- a) $A = \{a, в, д\}$, B – множество букв слова «дружба»;
 - b) $A = \{x | x \in R, x \geq 3.5\}$;
 - c) A – множество окружностей, радиус которых равен 2 см, B – множество окружностей, радиус которых равен 6 см;
 - d) A – множество уравнений, имеющих один действительный корень, B – множество квадратных уравнений;
 - e) A – множество решений уравнения $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$,
 B – множество решений неравенства $10^{-x-1.5} - 10^{1-2x} > 0$;
 - f) A – множество решений уравнения $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = x + 1$, B – множество решений уравнения $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;
 - g) A – множество тригонометрических функций, B – множество четных функций;
 - h) C – множество равнобедренных треугольников, D – множество правильных треугольников, E – множество тупоугольных треугольников.
8. Задайте множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$, если A – множество окружностей, радиус которых равен 3 см. B – множество окружностей, радиус которых равен 5 см.
9. Задайте множества $X \setminus Y$; $Y \setminus X$; $X \cup Y$; $X \cap Y$; $X \times Y$, если X – множество решений неравенства $x^2(x + 3) \cdot (x - 4) < 0$, а Y – множество решений неравенства $\frac{1}{x} < 1$.
10. Сформулируйте характеристические свойства множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, где A – множество уравнений, имеющих два действительных корня, B – множество квадратных уравнений.
11. Задайте множества $X \setminus Y$; $Y \setminus X$, если X – множество решений неравенства $x^4 \cdot (x^2 - 16) < 0$, Y – множество решений неравенства $\frac{1}{x-2} < 1$.
12. Задайте множества $X \cap Y$; $X \cup Y$, если X – множество решений неравенства $x^4 \cdot (x^2 - 16) < 0$, Y – множество решений неравенства $\frac{1}{x-2} < 1$.

13. X – множество числовых выражений, имеющих смысл на множестве N . Y – множество числовых выражений, имеющих смысл на множестве Z . Сформулируйте характеристическое свойство следующих множеств: $X \cup Y$; $X \cap Y$; $X \setminus Y$; $Y \setminus X$.

14. Задайте множества $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup C) \cap (A \setminus B)$, $A \Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$, $A(B \Delta C)$, $B \cup (A \Delta C)$, $C \Delta (A \cup B)$, $(C \cup B) \cap (C \Delta A)$, $(A \cup C) \cap (C \Delta A)$, $(A \cup B) \cap (C \Delta B)$, $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cup C$, $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $B \times A$, $C \times A$, $C \times B$, $(A \times C)(A \times B)$, $(A \times B) \cap (C \times A)$, $(B \cap C) \times A$, $(A \times B) \cup (B \times C)$

a) A – множество целых чисел, кратных 5,

$$B = \{x | x \in Z, x \leq 5\},$$

$$C = \{x | x \in R, x < 4\};$$

b) A – множество отрицательных целых чисел, кратных 5,

$$B = \{x | x \in R, -3.3 \leq x \leq 4.5\},$$

$$C = \{x | x \in Z, -7 < x < 1\};$$

c) $A = \{x | x \in R, 0 < x \leq 7\},$

$$B = \{x | x \in Z, -10 < x \leq -4\},$$

$$C = \{x | x \in R, x < -4.5\};$$

d) $A = \{x | x \in R, -3 < x < 5\},$

$$B = \{x | x \in Z, x \leq 2\},$$

$$C = \{x | x \in N, (x - 2.5) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5)\};$$

e) $A = \{x | x \in Z, x < 5\},$

$$B = \{x | x \in R, 0 \leq x < 10\},$$

$$C = \{x | x \in R, (x^2 - 3) \cdot (x^3 + 8) = 0\}$$

15. A – множество окружностей плоскости, радиус которых равен 5. B – множество окружностей плоскости, радиус которых равен 8. Задайте множества: $A \Delta B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

16. M – множество уравнений, имеющих два действительных корня N – множество квадратных уравнений. Сформулируйте характеристическое свойство множеств: $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$.

17. Для заданных множеств

$$A = \{(x, y) | x \in R, y \in R, y \geq x + 2\},$$

$$B = \{(x, y) | x \in R, y \in R, y \geq x^2 - 2\},$$

$$C = \{(x, y) | x \in R, 0 \leq x < 5, y \in R\}.$$

Найдите $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \setminus C$, $B \cap C \setminus A$, $(C \setminus A) \cap B$. Каждый случай проиллюстрируйте графически.

18. A - множество многоугольников, B - множество прямоугольных треугольников, C - множество равнобедренных треугольников, D - множество ромбов, E - множество прямоугольников, F - множество параллелограммов. Постройте диаграммы Эйлера-Венна для заданных множеств. Укажите характеристическое свойство элементов множеств:

а) $E \cap B \cap C$; б) $C \setminus B \cup D \cap E$; в) $D \setminus E \cup B$; г) $E \cup F$.

19. Задайте множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ если

а) A - множество решений уравнений $x^2 + y = y^2 + x$,

B - множество решений уравнений $y^2 + x = 6$;

б) A - множество решений уравнений $x \cdot y - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}$,

B - множество решений уравнений $x \cdot y - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}$;

в) A - множество решений уравнений $|2x + 3y| = 5$,

B - множество решений уравнений $|2x + 3y| = 1$.

20. Изобразите при помощи диаграмм Эйлера-Венна отношения между множествами A , B и C . Укажите характеристическое свойство элементов множества $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$, если

$$A = \{x | x \in Z, x > 3\}; \quad B = \{x | x \in Z, |x| < 5\}; \quad C = \{x | x \in Z, |x| < 4\}.$$

21. На диаграммах Эйлера – Венна изобразите отношения между заданными множествами:

а) $A = \{x | x \in R, x < 5\}$,

$B = \{x | x \in R, -10 \leq x \leq 10\}$,

$C = \{x | x \in Z, -3 \leq x \leq 4\}$.

б) A - множество прямоугольных треугольников,

B - множество остроугольных треугольников,

C - множество равносторонних треугольников.

в) A - область определения функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$,

B - множество решений неравенства $3x - x^2 - 4 > 5 - 3x$,

C - множество решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3} - 7\right) > 0$.

- г) A – множество окружностей плоскости,
 B – множество прямоугольников плоскости,
 C – множество ромбов плоскости.
- д) A – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x$,
 B – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = 2 - x$,
 C – множество прямых плоскости, параллельных прямой $x = 2$.
- е) A – область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,
 B – область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x^2 - 16}$,
 C – область определения функции $y = \frac{1}{x-8}$.
- ж) A – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x + 2$,
 B – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = 3x + 1$,
 C – множество прямых плоскости, параллельных прямой $x = 5$,
 D – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x - 2$.
- з) A – множество треугольников плоскости,
 B – множество четырехугольников плоскости,
 C – множество трапеций,
 D – множество параллелограммов,
 E – множество квадратов,
 F – множество прямоугольников.
- и) A – множество натуральных делителей числа 36,
 B – множество четных чисел,
 C – множество простых чисел, меньших 3,
 D – множество общих делителей числа 24, 72, 96,
 E – множество отрицательных целых чисел.
- к) A – множество всех точек плоскости, ордината которых больше 2,
 B – множество всех точек плоскости, абсцисса которых больше 3,
 C – множество всех точек плоскости, абсцисса которых равна -1 ,
 D – множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $y = x$.
- л) A – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$,
 B – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют

условию: $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$,

C – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию: $y = -4x + 2$.

22. Установите соответствие между аналитическими записями:

а)

1	$\overline{A \cap B}$	a	$\overline{A \cup B \cup (A \cap B)}$
2	$A \Delta B$	b	I
3	$A \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cup B$	c	$\overline{A} \cup \overline{B}$

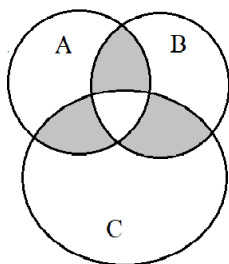
б)

1	$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$	a	$A \Delta B$
2	$A \cup B \cup \overline{A}$	b	$A \cup B$
3	$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$	c	I

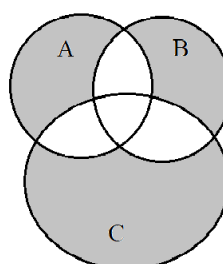
23. Докажите следующие утверждения для произвольных множеств A, B, C :

- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
- Если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
- Если $A \subset B$ и $B \subseteq C$, то $A \subset C$;
- Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;

24. Запишите с помощью формул заштрихованное множество



а)



б)

25. Используя диаграмму Эйлера-Венна решите задачи:

- из 100 школьников английский знают 42, немецкий - 30, французский - 28, английский и немецкий - 5, английский и французский - 10, немецкий и французский - 8, английский, немецкий и французский - 3 школьника. Сколько школьников не знают ни одного языка? (Отв. 20 школьников).

б) В спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом? (Отв. 9 человек).

с) В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 - немецкий, 8 - французский, 5 знают английский и немецкий, 4 - немецкий и французский, 3 - французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык? (Отв. 12; 3; 4).

26. Пусть A , B , и C – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α , β и γ соответственно. Изобразите в системе координат xOy множество D , полученное из множеств A , B и C по формуле δ , если:

а) $\alpha: x^2 + y^2 \leq 9$; $\beta: x^2 - 6x + y^2 \leq 0$; $\gamma: x^2 + 6x + y^2 \leq 0$; $\delta: A \Delta B \Delta C$;

б) $\alpha: |y| \leq \frac{|x+2|+|x-2|}{2}$; $\beta: |y| + |x| \geq 2$; $\gamma: x^2 + y^2 \leq 8$; $\delta: B \setminus A \Delta C$;

с) $\alpha: 4x^2 + 9y^2 \leq 36$; $\beta: 9x^2 + 4y^2 \leq 36$; $\gamma: x^2 + y^2 < 9$; $\delta: (A \Delta B) \setminus C$;

д) $\alpha: x^2 + 4|x| + y^2 - 4y + 4 \leq 0$; $\beta: x^2 - 4x + y^2 + 4|y| + 4 \leq 0$;
 $\gamma: x^2 + y^2 < 8$; $\delta: (A \cup B) \Delta C$.

27. Существуют ли множества A , B , X такие, что выполняется набор условий:

а) $B \setminus A = B \setminus X = X \setminus B = \emptyset$, $B \neq \emptyset$;

б) $B \cap X = \overline{A \cup B} = \emptyset$, $X \setminus A \neq \emptyset$;

с) $A \cap X = \overline{X} \cap \overline{A} = B \setminus A = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$;

28. Решить систему уравнений относительно множества X и указать условия совместимости системы или доказать её несовместимость

а) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \Delta X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$; б) $\begin{cases} C \setminus X \setminus C(A \cup B) \\ A \setminus B = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$; в) $\begin{cases} A \Delta X = C \setminus B \\ A \cup X = B \cap X \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$;

д) $\begin{cases} A \cup X = B \Delta \overline{C} \\ X \setminus C = B \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus A \end{cases}$; е) $\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ A \cup B = X \cap C \end{cases}$; ф) $\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \setminus C = \overline{X \cap C} \\ (B \setminus X) \setminus A = A \setminus C \end{cases}$.

II. Тема: Соответствия, отображения, отношения.

1. Даны два множества $X = \{x, y\}$ и $Y = \{a, b\}$. Найти все соответствия между ними:
 - а) всюду (полностью) определенные;
 - б) сюръективные;
 - в) функциональные;
 - г) взаимно однозначные.
2. Приведите известные Вам соотношения между элементами следующих множеств:
 - а) множество людей и множество городов;
 - б) множество студентов и множество преподавателей;
 - в) множество треугольников и множество вещественных чисел;
 - г) множество треугольников и множество окружностей;
 - д) множество многоугольников и множество натуральных чисел;
 - е) множество точек плоскости с заданной системой координат и множество пар чисел.Укажите свойства этих соответствий.
3. Представить графически и в виде матрицы соответствия (X, Y, Q) , если:
 - а. $X = \{2, 4, 6\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid x > y\}$;
 - б. $X = \{25, 16, 7, 6\}$, $Y = \{2, 5, 3, 9, 1\}$, $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid x : y\}$;
 - с. $X = \{\text{ромб, круг, куб, угол}\}$, $Y = \{\text{о, у, л, б, к, р, м, г}\}$,
 $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid \text{в слово } x \text{ входит буква } y\}$;
 - д. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$,
 $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1)\}$;
 - е. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, f\}$,
 $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid (a, d), (a, e), (b, f), (c, f)\}$;
 - ф. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{a, b, c\}$,
 $Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x_1, a), (x_2, a), (x_3, b), (x_4, b)\}$.
4. Построить соответствия, обратные соответствиям упражнения 3.
5. Для следующих соответствий построить обратные:
 - а. число x есть корень многочлена y ;
 - б. человек x прочел книгу y ;
 - с. книга x написана человеком y ;
 - д. деталь x обрабатывается на станке y .

6. Обратно ли соответствие « x - брат y » соответствию « y - сестра x »,
 $x \in X$, $y \in Y$, если:

- $X = Y$ - множество всех людей;
- X - множество мужчин, Y - множество женщин.

7. Установите соответствие между функцией и ее свойствами:

1	$y = 5 \sin 5x$	a	Инъективна, сюръективна, бективна.
2	$y = \sqrt{5x - 5}$	b	Инъективна, не сюръективна.
3	$y = 5x^5 - 5$	c	Не инъективна, функционально.

1	$0.2x^2 + 0.25y^2 = 1$	a	Сюръективна, не инъективна, не функциональна
2	$y = x - 1 $	b	Не сюръективна, не инъективна, не функциональна
3	$ y = x - 1 $	c	Не инъективна, не сюръективна, функционально

1	$ y = x + 1 $	a	Инъективна, сюръективна, бективна.
2	$y = 5 \arcsin 5x$	b	Не инъективна, сюръективна.
3	$y = 5x^5$	c	Инъективна, не сюръективна.

8. Для заданных соответствий q и p найдите их композицию $q \circ p$, если:
 $q = (X, Y, Q)$, $p = (Y, Z, P)$, где $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $Y = \{x, y, z, t\}$, $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Графики соответствий Q и P заданы в матричной форме Mq и Mp соответственно.

$$Mq = \begin{array}{c} \{x, y, z, t\} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0. & 1. & 0. & 1. \\ 1. & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 1. & 1. & 0. \\ 1. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. \end{array} \right. \end{array} \quad Mp = \begin{array}{c} \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 0. & 1. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 1. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 1. \end{array} \right. \end{array}$$

9. На множестве действительных чисел R заданы отображения:

$$f(x) = 1 - x; \quad g(x) = \frac{1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x}; \quad \text{Найдите композиции: } f \circ g \circ h; \\ g \circ h \circ f; \quad h \circ f \circ g.$$

10. Постройте графики следующих числовых функций, заданных на R^2 :
 $f(x) = \max(x, 0)$, $g(x) = -\min(x, 0)$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$.
11. Пусть $f: A \rightarrow B$, A и B – множества, мощности которых равны. Доказать, что:
- если f – инъективно, то f – биективно;
 - если f – сюръективно, то f – биективно.
12. Докажите, что отношения подобия на множестве треугольников является отношением эквивалентности.
13. Определите свойства следующих бинарных отношений:
- отношение «сидеть за одной партой»;
 - отношение «иметь общую границу» на множестве государств;
 - отношение «быть равноудаленным от г. Сарова» на множестве городов;
 - отношение «иметь общие остановки» на множестве автобусных маршрутов г. Сарова;
 - отношение делимости на множестве натуральных чисел;
 - отношение делимости на множестве простых чисел;
14. Дано множество $X = \{2, 3, 4\}$. На множестве $X \times X$ задано отношение:
 $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Постройте матрицу отношения. Является ли это отношение рефлексивным, симметричным, транзитивным?
15. На множестве натуральных чисел N задано отношение:
- $$aRb \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\frac{a}{b} + 3 \leq 0.$$
- Является ли R отношением эквивалентности?
 - Постройте матрицу данного отношения для подмножества $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
16. На множестве действительных чисел задано отношение G :
- $$xGu \Leftrightarrow f(x, y) = 0, \text{ где } f(x, y) = (x - y)(y + 3x)(x + 3y).$$
- Является ли G отношением эквивалентности?
 - Постройте матрицу этого отношения для элементов подмножества $X = \{0, 1, 2, 3\}$.

17. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ заданы бинарные отношения в матричном виде. Определите свойства каждого приведенного отношения.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 0. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 0. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 0. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 0. \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. \end{vmatrix} \\ \text{d)} \begin{vmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 0. & 1. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 0. & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. \\ 1. & 0. & 0. & 0. \end{vmatrix} \end{array}$$

18. Докажите, что:

- а) отношение « $\leq$ » является отношением частичного порядка на множестве вещественных чисел;
- б) в множестве подмножеств множества I отношение « $\subset$ » не является линейным порядком на совокупности подмножеств.

19. Пусть $X = R$. На X задано отношение $\varphi: x\varphi y \Leftrightarrow x \leq y$. Изобразить график $\Gamma \subseteq X^2$ этого отношения.

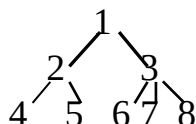
20. Пусть M – множество людей, на котором задано отношение φ «быть мужем». Определить обратное отношение.

21. Пусть на конечном множестве $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ задано некоторое отношение φ и A – матрица этого отношения. Показать, что матрицей обратного отношения φ^{-1} является матрица A^T (транспонированная).

22. Пусть X – множество людей, определить композицию отношений:

- а) φ = «быть женой», ψ = «быть отцом»;
- б) φ = «быть братом», ψ = «быть родителем»;
- в) φ = «быть братом», ψ = «быть отцом»;

23. В соответствии с иерархической структурой организации



- 1 – начальник организации;
- 2, 3 – заместители начальника;
- 4, 5, 6, 7, 8 – рядовые сотрудники.

задать отношение «Быть непосредственным начальником» матрицей и списком.

3. Комбинаторика

1. Множество X содержит n элементов, а множество Y – m элементов.
 - а) Сколькими способами можно построить отображение множества X в Y ?
 - б) Сколько существует биективных отображений $f: X \rightarrow Y$, если $n=m$?
2. Сколько упорядоченных троек, в которых 2 соседние буквы не являются одинаковыми, можно составить из 32 букв,
3. Имеется 4 книжных шкафа, в каждом из которых находится 100 книг. Все книги в шкафах различные. Сколькими способами можно выбрать из них пару книг (порядок книг в паре не имеет значение), так, чтобы книги были из разных шкафов?
4. Сколько существует шестизначных номеров с различными цифрами на автобусных билетах одной серии? (Нумерация билета может начинаться с нуля)?
5. Сколько существует шестизначных наборов билетов, которые читаются справа налево и слева направо одинаково?
6. Даны натуральные числа от одного до двадцати. Сколькими способами можно выбрать три числа, чтобы их сумма была четной?
7. Сколькими способами можно расселить 15 студентов по комнатам: двум трехместным, трем двухместным, трем одноместным?
8. Пароль на компьютер состоит из пяти символов: вначале три буквы, которые выбираются из 32 букв на нижнем регистре, а затем две цифры. Сколько можно составить таких паролей?
9. Пароль на компьютер состоит из семи символов: двух букв, которые выбираются из 32 букв на нижнем регистре и трех цифр, причем расположение букв является произвольным. Сколько можно составить таких паролей?
10. Сколько чисел, меньших миллиона, можно составить с помощью цифр 8 и 9?

11. Сколько можно составить из 32 букв пятибуквенных слов, содержащих хотя бы один раз букву «о»?
12. В селении проживает 1000 жителей. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.
13. Среди 10 книг имеются 3 книги по искусственному интеллекту, 4 книги по операционным системам и 3 книги по структурам данных. Сколько существует способов расставить эти книги на полке таким образом, чтобы:
- а) книги по каждой тематике стояли рядом?
 - б) книги по искусственному интеллекту стояли рядом?
 - с) книги по операционным системам оказались самыми правыми?
14. Двенадцатизначное двоичное число k разделили на три части: число a - двузначное, b и c – пятизначные. Сколько существует чисел k , для которых выполняется условие: в числе b содержится a единиц, в числе c также содержится a единиц? (Число k может начинаться с нуля).
15. Двенадцатизначное двоичное число k разделили на четыре равные части a, b, c, d . Сколько существует двенадцатизначных двоичных чисел, если все числа a, b, c, d являются нечетными?
16. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, начинающихся с одной из цифр 1, 2, 3, и оканчивающихся одной из цифр 5, 7, 8, если в каждом числе точно две цифры четные? Цифры могут повторяться.
17. Сколькими способами можно переставить в числе 34563456 цифры так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?
18. Сколькими способами можно переставить цифры в числе 1234114546 так, чтобы
- а) три одинаковые цифры не шли друг за другом;
 - б) никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?
19. Набор данных содержит результаты 1000 наблюдений. Эти данные обрабатываются тремя программами. Все вместе они обрабатывают результаты всех 1000 наблюдений, причем каждая из них обрабатывает не менее 300 результатов. В остальном эти результаты разбиваются на группы произвольно. Сколькими способами это можно сделать?

20. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z + t = 18$ при условии, что x, y, z , и t – целые числа и $x, y \geq 0, z \geq 3, t \geq 2$?

21. Докажите тождества:

а) $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = (n - 4)^2$; б) $\frac{A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^n} = k^2$.

22. Решите уравнения:

а) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$; б) $30P_x = P_{x+2}$;

23. Используя бином Ньютона, найдите разложения:

а) $(x - 2)^7$; б) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^5$; в) $(\sqrt{x} + y)^4$; г) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$.

24. Сколько рациональных членов содержится в разложении $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{20}$?

25. Показатель степени одного бинома на 5 больше показателя степени другого бинома. Определите эти показатели, если сумма биномиальных коэффициентов вместе равна 1056.

26. Найти в разложении бинома $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)^{16}$ номер члена, не содержащий x .

27. Найти наибольший член разложения бинома:

а) $(1 + \sqrt{3})^{19}$; б) $(3 + \sqrt{5})^{17}$; в) $(4 + \sqrt{11})^{14}$; г) $(\sqrt{7} + 3)^{15}$.

28. Найдите двенадцатый член разложения бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{3x}} - 2x\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена разложения равен 105.

29. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было точно:

- а) король, 2 дамы, 1 пиковая карта;
- б) 2 карты чёрной масти, 2 вал ьта;
- в) 2 дамы, 2 крестовые карты;
- г) не меньше 4 красных карт, 2 туза.

30. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова:

- а) **атаман**, чтобы согласные шли в алфавитном порядке, но буквы "а" не стояли рядом?
- б) **интернирование**, при условии, что согласные и гласные чередуются, гласные идут в алфавитном порядке?

- с) **приватизация**, при условии, что чередуются пары гласных и согласных букв?
- д) **ультиматум**, при условии, что между буквами "т" стоят все гласные и только они?

31. Докажите что:

- а) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^2 = n^3$;
 б) $1 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n + 1)^3$;
 в) $C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 = n^4$;
 г) $1 + 14C_n^1 + 36C_n^2 + 24C_n^3 = (n + 1)^4 - n^4$.

32. Сколькими способами можно из n различных элементов выбрать пару сочетаний: первое – содержащее k элементов, а второе – содержащее $m-k$ (других) элементов?

33. Докажите тождества:

а) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$; б) $\sum_{k=0}^m C_n^k C_{n-k}^{m-k} = 2^m \cdot C_n^m$.

34. Вычислите следующие суммы:

- а) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (n + 1)C_n^n$;
 б) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + 4C_n^5 + \dots + (n - 1)C_n^n$;
 в) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \dots + (2n + 1)C_n^n$;
 г) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + 15C_n^4 + \dots + (4n - 5)C_n^{n-1}$;
 е) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$;
 ф) $\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \frac{1}{5}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n$;
 г) $2C_n^1 + 9C_n^2 + 20C_n^3 + 35C_n^4 + \dots + n(2n - 3)C_n^{n-1}$;
 д) $-2C_n^0 + 12C_n^2 + 40C_n^3 + 90C_n^4 + \dots + n(n^2 - 4n + 3)C_n^{n-2}$.

35. Напишите разложение:

- а) $(a + b + c)^2$;
 б) $(a + b + c)^3$;
 в) $(a + b + c + d)^4$.

36. Найдите коэффициент в разложении $(x + y + z)^7$ при $x^2y^3z^2$.

37. Найдите коэффициент в разложении:

- а) $(2 + x^2 - x^3)^{10}$ при x^{10} ;
 б) $(1 + 2x^2 - 3x^3)^{10}$ при x^{12} ;
 в) $(2 - x^3 + x^5)^{12}$ при x^{15} ;

38. Сколько рациональных членов содержит разложение:

a) $(\sqrt{5} + \sqrt[4]{6})^{40}$?

b) $(\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2})^{100}$?

c) $(\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{6})^{30}$?

39. Второй, третий и четвертый члены разложения $(x + y)^z$ равны соответственно 240, 720, 1080. Найти x, y, z .

40. Используя биномиальную формулу для приближенного вычисления вычислите:

a) 1.002^{10} ; b) 0.996^{20} ; c) $\sqrt{9.09}$; d) $\sqrt[3]{8.024}$; e) $\sqrt[3]{999}$; f) $\frac{1}{\sqrt[5]{3120}}$.

41. В группе из 25 студентов все физики или блондины и других нет. Физиков среди них 17, а блондинов 11. Сколько физиков – блондинов?

42. Руководству факультета нужно было узнать, сколько из 400 студентов не изучают ни одного иностранного языка из трех: немецкого, французского, испанского. Объединив полученные данные по группам, выяснили, сколько студентов изучают иностранные языки в том или ином сочетании. Эти данные отражены в следующей таблице:

Языки	Число студентов
Французский	15
Немецкий	25
Испанский	40
Французский и немецкий	6
Французский и испанский	8
Немецкий и испанский	2
Французский, немецкий, испанский	1

Сколько студентов не изучают ни одного иностранного языка из указанных?

43. На факультете маркетинга собрали данные о заведениях быстрого питания, расположенных поблизости от университета. Результаты были занесены в таблицу:

Тип продаваемых продуктов	Число заведений	Тип продаваемых продуктов	Число заведений
Гамбургеры	7	Гамбургеры и пицца	5
Курица	9	Курица и пицца	7

Пицца	10	Гамбургеры, курица и пицца	5
Гамбургеры и курица	4	Ничего из перечисленного	3

Сколько заведений быстрого питания находятся поблизости от университета?

44. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 делятся на 3, 7, или 9?

45. Сколько натуральных чисел от 1 до 999 не делятся ни на 6, ни на 8, ни на 12?

46. Из колоды 36 карт вытянули 4 карты. Если не учитывать вес карты, а только ее масть (буби, черви, крести, пики), то какова вероятность того, что среди выбранных карт окажется:

- a) 2 карты одной масти?
- b) 3 карты черной масти?
- c) 2 карты «буби»?
- d) все карты разной масти?

47. Решите предыдущую задачу с учетом веса карты. Сравните результаты с результатами из предыдущей задачи. Объясните различие ответов.

48. В урне находятся по m одинаковых шаров каждого из n цветов. Из урны сразу вытаскивают k шаров. Шары не пронумерованы! Какова вероятность, что:

- a) среди вынутых шаров только p шаров будут одного цвета?
- b) среди вынутых z шаров l шаров будут одного цвета, q шаров также одного цвета, а - остальные других цветов?
- c) среди вынутых шаров s шаров будут одного фиксированного цвета?

Решите задачу для $m=200$, $n=5$, $k=5$, $p=3$, $z=7$, $l=2$, $q=3$.

Рекуррентные соотношения

1. Найти общее решение линейного рекуррентного уравнения:

- a) $a_{n+1} = 3a_n, a_0 = 4$;
- b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, a_0 = 5, a_1 = 8$;
- c) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n, a_0 = 1, a_1 = 2$;
- d) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$;
- e) $a_n = 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 3$;
- f) $a_n = 2a_{n-1} - 3a_n, a_0 = 1, a_1 = 2$;
- g) $a_n = 8a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 8$;
- h) $a_{n+2} = 2\cos\alpha a_{n+1} - a_n, a_0 = 1, a_1 = \cos\alpha$;
- i) $a_{n+3} = 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n, a_1 = 1, a_2 = -3, a_n = -29$;
- j) $a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$;
- k) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = 7$.
- l) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, a_0 = 0, a_1 = 1$;
- m) $a_{n+4} = -3a_{n+2} - a_n$;
- n) $a_{n+4} = 4a_{n+3} - 8a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n$;
- o) $a_{n+5} = 4a_{n+4} - 16a_{n+3} + 3a_{n+2} - 12a_{n+1} + 48a_n$;
- p) $a_{n+5} = -4\sqrt{3}a_{n+4} - 16a_{n+3} + 4a_{n+2} + 16\sqrt{3}a_{n+1} + 64a_n$;
- q) $a_{n+4} = 12a_{n+3} - 4a_{n+2} + 44a_{n+1} + 80a_n, a_0 = 4, a_1 = -4, a_2 = 36, a_3 = 16$;
- r) $a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n, a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = -13, a_3 = -25$;
- s) $a_{n+4} = 6a_{n+3} - 8a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n, a_0 = 4, a_1 = 0, a_2 = 20, a_3 = 48$;
- t) $a_{n+4} = 2a_{n+3} + 15a_{n+2} + 4a_{n+1} - 20a_n, a_0 = 4, a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = 19$;
- u) $a_{n+4} = 11a_{n+2} - 18a_{n+1} + 8a_n, a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1$;
- v) $a_{n+4} = 2a_{n+3} + 15a_{n+2} + 4a_{n+1} - 20a_n, a_0 = 4, a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = 19$;

2. Методом рекуррентных соотношений найдите предел последовательности:

- a) $\sqrt{1}, \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \dots, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \sqrt{1}}}}, \dots$;
- b) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}, \dots$;

$$\text{с) } \sqrt{n}, \sqrt{n + \sqrt{n}}, \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}, \dots, \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots \sqrt{n}}}}, \dots$$

3. Методом рекуррентных соотношений вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 (1-x^2)^n dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx; \quad \text{с) } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx; \quad \text{д) } \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx; \quad \text{е) } \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4. Найдите общие решения следующих рекуррентных соотношений:

- а) $f_{n+1} - f_n = n$;
- б) $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 4$;
- с) $f_{n+1} - f_n = 3^n$;
- д) $f_{n+1} + 3f_n = 3n - 4$;
- е) $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 3 \cdot 2^{n-1}$;
- ф) $f_{n+3} - 6f_{n+2} + 11f_{n+1} - 6f_n = -24n^2 - n - 8, f_1 = 4, f_2 = 26, f_3 = 74$

5. Найти производящие функции для последовательностей:

- а) 4, 4, 4, 4, ... ;
- б) 1, 0, 1, 0, 1, ...;
- с) 0, 1, 0, 1, 0, ...;
- д) 1, 2, 3, 4, 5, ...;
- е) 1, 4, 9, 16, ...;
- ф) 1, 3, 9, 27, ... ;
- г) 3, 9, 27, 81, ...;
- х) 2, 4, 10, 28, 82, ...
- и) 1, 4, 11, 26, 57, ...

6. Найти производящую функцию для последовательности, заданной рекуррентным соотношением:

- а) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 2, a_1 = 6$;
- б) $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, a_0 = 2, a_1 = 6$;
- с) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n + 4, a_0 = 1, a_1 = 4$;
- д) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 6a_n - 2, a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 6$;
- е) $a_{n+3} = 12a_{n+2} - 44a_{n+1} + 48a_n + 4, a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 9$;

7. Найти общий член последовательности, для которой заданная функция $G(z)$, является производящей:

$$\text{а) } G(z) = \frac{1}{3z+1}; \quad \text{б) } G(z) = \frac{1}{2-5z}; \quad \text{с) } G(z) = \frac{1}{(3-z)^2};$$

$$\begin{aligned} \text{d) } G(z) &= \frac{2z+1}{z^2-3z+2}; & \text{e) } G(z) &= \frac{1}{(1-z)^2}; & \text{f) } G(z) &= \frac{z}{(1-z)^2}; \\ \text{g) } G(z) &= \frac{z^3}{(1-2z)^2}; & \text{h) } G(z) &= \frac{z^{-3}}{(1-2z)^2}; & \text{i) } G(z) &= \frac{2z}{(1-2z)^2(1-z)^3}. \end{aligned}$$

8. Найти общий член последовательности, полученной умножением:
последовательности натуральных чисел на последовательность:

- a) последовательности натуральных чисел на последовательность четных натуральных чисел;
- b) последовательности натуральных чисел на последовательность нечетных натуральных чисел;
- c) последовательности четных натуральных чисел на последовательность нечетных натуральных чисел.

9. Найти общий член последовательности, полученной умножением последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями:

- a) $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $a_0 = 0$ и $b_n = 4b_{n-1} - 3b_{n-2}$, $b_0 = 0$, $b_1 = 2$;
- b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ и $b_n = -2b_{n-1} - b_{n-2}$, $b_0 = 1$, $b_1 = 4$;
- c) $a_n = 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ и $b_n = 3b_{n-1} - 2b_n$, $b_0 = 1$, $b_2 = 3$;

10. Решить рекуррентные соотношения:

- a) $a_{n+1} - a_n = n$, $a_1 = 1$;
- b) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 25 \cdot 5^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = -9$;
- c) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
- d) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$;
- e) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 2^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
- f) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 2^n + 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.